d'Archimède est la moitié de la circonférence du cercle qui sert à la décrire, et c'étoit une pensée que j'avois eue il y a fort longtemps, mais je me détrompai d'abord. Si c'est celle de M. de Roberval, je m'assure qu'il ne sera pas longtemps de même avis, et qu'il n'aura besoin que d'une seconde réflexion pour se dédire.

Je suis en peine de savoir des nouvelles de M. de Carcavi; vous m'obligerez de m'en donner et de me croire, mon Révérend Père,

Votre très humble et très affectionné serviteur,

FERMAT.

A Toulouse, ce 16 février 1643.

LVI.

FERMAT A MERSENNE (¹).

MARDI 7 AVRIL 1643.

(A, f°s 19-20; B, f° 22 v°.)

MONSIEUR MON RÉVÉREND PÈRE,

1. Vous n'eûtes pas de mes lettres par le dernier courrier, à cause d'une petite absence qui m'a tenu huit jours à la campagne pendant la fête. Vous aurez maintenant la réponse que je fais à M. de Brulart (²) jointe à celle-ci; je l'ai écrite à la hâte, comme vous verrez, et c'est la raison qui m'oblige à vous prier qu'il n'en soit pas fait de copie et qu'elle ne sorte pas d'entre les mains de M. de Brulart.

(¹) Lettre inédite.

(²) Le personnage désigné dans les Lettres LIV et LV sous le nom de Saint-Martin s'appelait Pierre Bruslart de Saint-Martin et était collègue de Carcavi au Grand-Conseil. Il semble qu'ici il s'agit encore de lui (*Cp.* LV, **4**).

La réponse dont parle Fermat est perdue; on voit qu'elle concernait sa méthode *de maximis et minimis*.

Ce n'est pas que ce que j'y ai mis ne puisse être expliqué assez aisément, mais il y a quelque petit équivoque où on me pourroit accuser de négligence, comme lorsque j'ai dit que les deux derniers termes de l'équation qui se trouvent mesurés par E sont en plus grande raison qu'aucuns autres qui leur soient relatifs dans les plus hautes puissances. On pourrait dire qu'à le prendre *convertendo*, ils sont en moindre raison qu'aucuns autres de leurs relatifs; mais c'est en ma règle et en mon raisonnement toute la même chose, et les mêmes conséquences se déduisent de l'un et de l'autre.

Il y pourroit encore avoir équivoque en ce que j'ai dit : que non seulement A — E doit donner la même équation que A + E, mais encore que, si A + E donne moins que A, A — E doit aussi donner moins que A. Car il semble d'abord que, si A — E donne la même équation que A + E, qu'il est infaillible que, l'un donnant moins que A, l'autre donnera de même moins que A; ce qui pourtant n'est pas et qu'il me semble avoir suffisamment expliqué par l'exemple que j'ai ajouté.

Mais, pour ôter tout équivoque, lorsque j'ai dit que A — E doit donner la même équation que A + E, j'entends que par la position de A — E, en suivant ma méthode, on doit trouver A égal à une même quantité que si nous employons A + E par la même méthode. Mais, lorsque j'ai ajouté, en la seconde condition, que si A + E donne moins que A, A — E doit de même donner moins que A, j'entends que si, par la position de A + E, les homogènes qui représentent le plus grand sont moindres que les homogènes qui représentent le plus grand en la position de A seul, de même, en la position de A — E, les homogènes qui représentent le plus grand doivent être moindres que les homogènes qui représentent le plus grand en la position de A seul.

Voilà ce que j'ai cru vous devoir dire sur ce sujet. Car pour rendre la chose entièrement claire et parfaitement démontrée, il faudroit un Traité entier, que je ne refuirai pas de faire, dès que je pourrai trouver du loisir assez pour cela.

2. J'attends la solution de quelques-unes de mes questions numériques (1), et vous prie de m'apprendre quand est-ce que M. Frenicle sera de retour à Paris, et si M. de Sainte-Croix est en état de soudre des questions.

3. Pour les parties aliquotes, j'ai découvert des choses excellentes et je puis vous envoyer quelques multiples de mon invention autres que ceux que vous avez mis dans la préface du petit Livre *Des Pensées de Galilée* (2), et pour ne vous laisser plus en doute que je ne possède la voie infaillible de ces questions, j'ai relu ces jours passés une question que vous me faisiez par ordre de M. Frenicle, dont je vous envoie présentement la solution.

4. Vous me demandiez donc quelle proportion a le nombre, qui se produit des nombres suivants, avec ses parties aliquotes :

214 748 364 800 000, 11, 19, 43, 61, 83, 169, 223, 331, 379, 601, 757, 961, 1201, 7019, 823 543, 616 318 177, 6561, 100 895 598 169.

Vous me demandiez ensuite si ce dernier nombre est premier ou non, et une méthode pour découvrir dans l'espace d'un jour s'il est premier ou composé.

A la première question, je vous réponds que le nombre qui se fait de tous les nombres précédents multipliés entre eux, est sous-quintuple de ses parties.

(1) *Voir* Lettre LV, **3**.

(2) Les nouvelles pensées de Galilée, mathematicien et ingenieur du duc de Florence, où il est traité de la proportion des mouvements naturels et violents et de tout ce qu'il y a de plus subtil dans les Mechaniques et dans la Physique. Où l'on verra d'admirables inventions et demonstrations inconnues jusqu'à present. Traduit d'Italien en François. — A Paris, chez Henry Guenon, rue Saint-Iacques, à l'Image de S. Bernard, pres des Iacobins, M.DC.XXXIX. Avec Privilege du Roy.

Dans la préface de ce volume, Mersenne ne donne d'après Fermat que les nombres déjà insérés dans celle de l'*Harmonie universelle* de 1636 (*voir* Pièce IV_A). Il en a ajouté divers autres dus à Sainte-Croix, Descartes (*un excellent Geometre*), Frenicle (*un excellent esprit*), au reste sans aucune désignation par nom propre.

A la seconde question, je vous réponds que le dernier de ces nombres est composé et se fait du produit de ces deux :

898 423 et 112 303,

qui sont premiers (¹).

Je suis toujours, mon Révérend Père,

Votre très humble et très affectionné serviteur,

FERMAT.

A Toulouse, ce 7 avril 1643.

LVII.

FRAGMENT D'UNE LETTRE DE FERMAT (²).

< 1643 >

(A, f° 74.)

Tout nombre impair non quarré est différent d'un quarré par un quarré, ou est la différence de deux quarrés, autant de fois qu'il est

(¹) Sur le problème ainsi posé, il était aisé de trouver la composition du dernier nombre. En effet, si, pour trouver le rapport du produit à la somme des parties aliquotes, on part du premier nombre qui est $2^{36} \times 5^3$, on remarque que 2^{36} a, pour somme de ses parties aliquotes, $223 \times 616\,318\,177$. Le second de ces deux facteurs correspond de même à la somme $2 \times 7^3 \times 898\,423$. Ce dernier facteur ne se retrouvant pas, comme les précédents, parmi ceux du produit proposé, il est naturel d'essayer de diviser par lui le dernier nombre donné, dès que l'on ignore si celui-ci est premier. Par conséquent, quelque méthode que possédât Fermat pour rechercher si un nombre est premier ou non (*voir* Pièce LVII), il est improbable qu'il ait employé cette méthode et fait des calculs plus longs que ceux que nous avons indiqués.

(²) Le fragment qui suit a été publié par M. Charles Henry (*Recherches etc.*, p. 191) d'après le brouillon d'Arbogast, transcrit d'une copie perdue de Mersenne. Il ne renferme que l'exposé d'une méthode pour la recherche des diviseurs d'un nombre, en commençant par les plus grands, et répond ainsi à une question faite par Mersenne pour le compte de Frenicle (*Cp.* LVI, 4) et sur laquelle les correspondants de Fermat ont dû revenir. Mais la copie d'Arbogast porte le titre : *Des nombres des parties aliquotes*, qui semble indiquer que ce fragment faisait partie d'une communication beaucoup plus étendue, adressée soit à Mersenne, soit à Frenicle. Dans ce cas, la date en serait probablement postérieure à celle que suppose le rang assigné à cette pièce pour la rapprocher de la Lettre LVI.

composé de deux nombres, et, si les quarrés sont premiers entre eux, les nombres compositeurs le sont aussi. Mais si les quarrés ont entre eux un commun diviseur, le nombre en question sera aussi divisible par le même commun diviseur, et les nombres compositeurs seront divisibles par le côté de ce commun diviseur.

Par exemple : 45 est composé de 5 et de 9, de 3 et de 15, de 1 et de 45. Partant, il sera trois fois la différence de deux quarrés : savoir de 4 et de 49, qui sont premiers entre eux, comme aussi sont les compositeurs correspondants 5 et 9; plus, de 36 et de 81, qui ont 9 pour commun diviseur, et les compositeurs correspondants, 3 et 15, ont le côté de 9, savoir 3, pour commun diviseur; enfin 45 est la différence de 484 et 529, qui ont 1 et 45 pour compositeurs correspondants.

Il est fort aisé de trouver les quarrés satisfaisants, quand on a le nombre et ses parties, et d'avoir les parties lorsqu'on a les quarrés.

Cette proposition se trouve quasi tout par tout. On en pourrait quasi autant dire des pairements pairs, excepté 4, avec quelque petite modification.

Cela posé, qu'un nombre me soit donné, par exemple 2 027 651 281, on demande s'il est premier ou composé, et de quels nombres il est composé, au cas qu'il le soit.

J'extrais la racine, pour connoître le moindre des dits nombres, et trouve 45 029 avec 40 440 de reste, lequel j'ôte du double plus 1 de la racine trouvée, savoir de 90 059 : reste 49 619, lequel n'est pas quarré, parce que aucun quarré ne finit par 19, et partant je lui ajoute 90 061, savoir 2 plus que 90 059 qui est le double plus 1 de la racine 45 029. Et parce que la somme 139 680 n'est pas encore quarrée, comme on le voit par les finales, je lui ajoute encore le même nombre augmenté de 2, savoir 90 063, et je continue ainsi d'ajouter tant que la somme soit un quarré, comme on peut voir ici (¹). Ce qui n'arrive qu'à 1 040 400, qui est quarré de 1020, et partant le nombre donné est composé; car il est aisé, par l'inspection des dites sommes, de voir qu'il n'y a au-

(¹) Fermat avait dû effectuer en marge les calculs indiqués, qui n'ont pas été reproduits sur la copie.

cune qui soit nombre quarré que la dernière, car les quarrés ne peuvent souffrir les finales qu'elles ont, si ce n'est 499944 qui néanmoins n'est pas quarré.

Pour savoir maintenant les nombres qui composent 2027651281, j'ôte le nombre que j'ai premièrement ajouté, savoir 90061, du dernier ajouté 90081. Il reste 20, à la moitié duquel plus 2, savoir à 12, j'ajoute la racine premièrement trouvée 45029. La somme est 45041, auquel nombre ajoutant et ôtant 1020, racine de la dernière somme 1040400, on aura 46061 et 44021, qui sont les deux nombres plus prochains qui composent 2027651281. Ce sont aussi les seuls, pource que l'un et l'autre sont premiers.

Si l'on alloit par la voie ordinaire, pour trouver la composition d'un tel nombre, au lieu de onze additions, il eût fallu diviser par tous les nombres depuis 7 jusqu'à 44021.

Plusieurs abrégés se peuvent trouver, comme lorsqu'on ne fait qu'une addition au lieu de dix, aux endroits où les sommes ont leurs finales quarrées, quand les compositeurs sont beaucoup éloignés l'un de l'autre.

LVIII.

FERMAT A < SAINT-MARTIN > (1).

DIMANCHE 31 MAI 1643.

(B, f° 9 v°.)

1. *Donner le sixième triangle qui a l'unité pour différence de ses deux petits côtés.*

(1) Fragment inédit d'une lettre perdue. Il porte comme titre, dans le manuscrit : « *Extraict d'une lre du* 31 *may* 1643 *à M. DF.* », ce qui indiquerait Frenicle comme le destinataire. Mais, si l'on compare la Lettre L de Frenicle à Fermat, il est très improbable que le premier ait proposé au second deux questions dont il lui avait auparavant donné une solution. Il est établi d'autre part, par les lettres suivantes (LIX et LX), que les questions énoncées par Fermat dans la présente (3) étaient proposées à St-Martin et à Frenicle. Le destinataire effectif fut donc plutôt St-Martin et la confusion s'explique d'ailleurs facilement.